

Henry de Plinval
Eric David
X2001

TRAVAIL DE
MODELISATION ET DE SIMULATION
ANNEE 2004

FUSION DE DEUX
TOURBILLONS CO-ROTATIFS
BIDIMENSIONNELS



Summary

This work analyses the vortices merging process thanks to a C program, written by C. Josserand, based on a two-dimensional simulation of the Navier-Stokes equations.

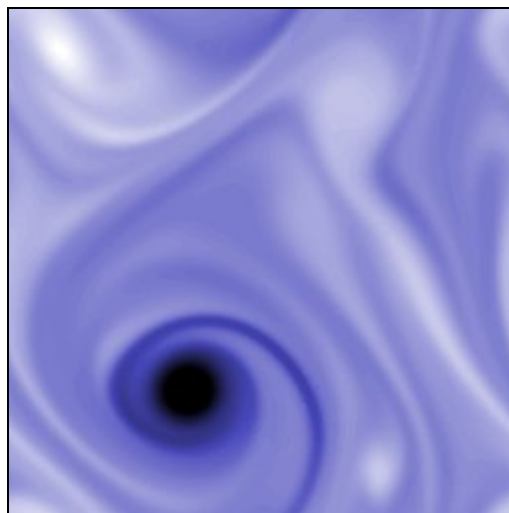
First, it presents the theory used in the source code : the equation of Navier-Stokes describes the behaviour of a fluid ; the Fourier transformation is then applied to this equation, giving a simple evolution equation for the vorticity. The program uses this equation to calculate vorticity.

Then, this work presents the usual phenomena described for vortices mergings : a diffusion step, during which the cores grows (this step's length is proportional to the Reynolds number), a convection step, when filaments are created and make the vortices getting closer (its length does not depend on the Reynolds number, at least when the Reynolds is not too low), and an axisymmetrisation step (when the fluid threads disappear thanks to viscous diffusion).

In a second part, it presents numerical tests with various Reynolds numbers, spatial resolution and time step, considering the evolution of the distance between the cores of the vortices. Then it analyses and explains the link between the Reynolds number and the different steps of the merging process : considering the results of many numerical simulations, it explains the length of the different steps, using theoretical arguments.

At last, it shows the impact of noise (random vorticity added to the two vortices) on the merging and proposes a model to simulate the noise.

A common application of this kind of work is the study of the vortices created on the wings of a plane : in this case, many vortices merge into one on each side of the plane. The comprehension and control of such a process is a huge challenge for the aeronautical industry. Even though the two-dimensional aspects ignores some parts of the problem, linked with the third dimension, it is nonetheless a first step in the comprehension of those phenomena.



Simulation of a vortices merging with turbulence

(picture caught from the software we used)

Introduction

Dans ce travail de modélisation et de simulation (TMS), nous allons étudier le phénomène de fusion de deux tourbillons bidimensionnels tournant dans le même sens (tourbillons corotatifs).

Une telle étude trouve sa justification dans ses nombreuses applications : l'atmosphère terrestre possède des structures tourbillonnaires dont les évolutions et interactions dictent les échanges de chaleur et d'humidité entre les différents points du globe; l'intérieur de la terre est aussi le siège de tourbillons, dont l'un des effets semble être le champ magnétique terrestre; à l'échelle humaine, les sillages d'objets engendrent des tourbillons. En particulier, les formes profilées comme les ailes d'avions induisent des tourbillons qui fusionnent, pour ne laisser que deux tourbillons contra-rotatifs hautement énergétique et de durée de vie longue, lesquels présentent un danger pour les avions suivants. La compréhension de la fusion de tels vortex est donc un enjeu majeur de la dynamique des fluides.



Présence de tourbillons dans les sillages d'avions

Pour ce faire, nous utilisons un logiciel (vortex, écrit par Christophe Josserand) qui calcule par une méthode de Fourier 2-D (méthode pseudo-spectrale) l'évolution temporelle d'un système de deux tourbillons initialement positionnés symétriquement par rapport à l'origine, en rotation dans le même sens, et ayant des profils de vorticités gaussiens.

Nous avons utilisé et modifié ce logiciel afin d'étudier la fusion de ces tourbillons. Il nous a fallu tout d'abord étudier le modèle physique utilisé dans l'algorithme, et en analyser l'implémentation dans le programme. Nous avons également programmé différents outils d'analyse (sortie BMP, suivi lagrangien...) qui facilitent notre étude.

Dans un second temps, nous avons mené une étude de consistance numérique, visant à quantifier le compromis entre le nombre de points de discrétisation et le temps de calcul. Nous avons également analysé les durées des différentes phases, ce qui nous a permis de proposer des explications sur les phénomènes en jeu pendant ces phases.

Enfin, nous avons mené une étude de la fusion des tourbillons en fonction de perturbations extérieures : champ de vorticités aléatoire d'amplitude variant, ajout d'autres tourbillons.

Sommaire

I - ANALYSE DU PROGRAMME DE SIMULATION -----	5
1 - ETUDE PRELIMINAIRE -----	5
a) <i>La diffusion visqueuse</i> -----	6
b) <i>La fusion des deux vortex</i> -----	7
c) <i>La symétrisation du vortex</i> -----	9
2 - LES MODELES UTILISES POUR LE CALCUL DES DIFFERENTS PARAMETRES -----	10
a) <i>Calcul de la distance entre les tourbillons</i> -----	10
b) <i>Phase diffusive et phase convective : critère de changement de phase</i> -----	10
3 - MISE AU POINT DE L'OUTIL -----	11
4 - VISUALISATION DE L'ECOULEMENT -----	12
II - CONSISTANCE, ETUDE NUMERIQUE -----	13
1 - VARIATION DU PAS DE TEMPS -----	13
2 - VARIATION DE LA PRECISION DE LA MAILLE-----	14
3 - VARIATION DU NOMBRE DE REYNOLDS -----	15
4 - EVOLUTION DE L'ANGLE DES TOURBILLONS-----	19
III - INFLUENCE DU BRUIT -----	20
1 - MESURES A BRUIT IMPORTANT -----	20
2 - ETUDE STATISTIQUE A FAIBLE BRUIT -----	22
IV - CONCLUSION -----	25
V - BIBLIOGRAPHIE -----	26

I - Analyse du programme de simulation

1 - *Etude préliminaire*

Dynamique des fluides : équation d'un écoulement bidimensionnel

Le fluide étudié est régi par l'équation de Navier-Stokes inhomogène (que l'on écrit ici pour $\rho = 1$) :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{v} \cdot \vec{v} = -\vec{\nabla} P + \nu \Delta \vec{v}}$$

En appliquant le rotationnel et en projetant selon z, on obtient :

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + \vec{\nabla}(\Delta \Psi) \cdot \vec{v} = \nu \Delta^2 \Psi \quad \text{sachant que } \omega = \text{rot} \vec{v} \cdot \vec{e}_z = -\Delta \Psi \quad (\text{Ref p 391})$$

Si $\hat{\Psi}$ est la transformée de Fourier 2-D de Ψ , elle vérifie l'équation :

$$\boxed{\frac{\partial(k^2 \hat{\Psi})}{\partial t} - F\left\{\vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\Delta \Psi)\right\} = -\nu k^4 \hat{\Psi}}$$

Posant alors : $V_{\vec{k}} = \Psi_{\vec{k}} \cdot e^{-\nu k^2 t}$

Il vient : $\partial_t(V_{\vec{k}}) = [NL]_{\vec{k}}$ où $[NL]_{\vec{k}}$ est un terme non linéaire.

Dès lors, la fonction de courant psi est calculée par une formule du type :

$$\boxed{\Psi_{\vec{k}}(t+dt) = \Psi_{\vec{k}}(t) \cdot e^{+\nu k^2 dt} + \int NL}$$

où le terme $\int NL$ prend en compte l'intégration du terme non linéaire de l'équation de Navier-Stokes. Cette partie du calcul n'est pas effectuée dans l'espace de Fourier mais dans l'espace classique. C'est pourquoi cette méthode est appelée pseudo-spectrale.

Pour réaliser les transformées de Fourier, signalons qu'on utilise une transformée rapide (disponible sur le Net), en $N^2 \cdot \ln N^2$ au lieu de $(N^2)^2$ pour une transformée "naïve" (où $N \times N$ est le nombre de points de discrétisation).

Description physique de la fusion de deux tourbillons

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats obtenus par différents chercheurs sur la fusion de deux tourbillons; nous nous appuyons essentiellement sur la thèse de P. Meunier (Cf. bibliographie, 1) et l'article de le Dizès paru dans *Journal of Fluid Mechanics*, 2002 (bibliographie, 2).

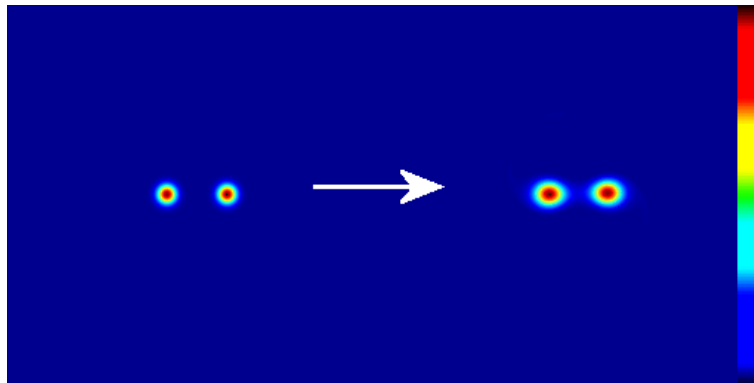
Nous considérons donc deux tourbillons, semblables, de rayon a (voir ci-après pour la définition du rayon d'un tourbillon), de circulation Γ et séparés d'une distance b (voir aussi plus loin la définition de cette distance).

Dans la dynamique de fusion de deux tourbillons, on distingue trois phases principales :

- une première phase pendant laquelle les tourbillons tournent l'un autour de l'autre à vitesse presque constante, en restant sensiblement à la même distance; par diffusion visqueuse, leur taille s'accroît pendant cette phase;
- lorsque le rapport $\frac{a}{b}$ atteint une valeur critique, les deux tourbillons se rapprochent rapidement tandis que sont générés des filaments, qui s'effilent et s'allongent. Cette phase est essentiellement **convective**; nous verrons pourtant que, selon les valeurs du Reynolds, cette phase peut-être très différente;
- enfin, dans une dernière phase, les filaments s'enroulent autour du tourbillon produit, afin d'obtenir l'axisymétrisation de celui-ci.

Revenons en détail sur chacune de ces trois phases :

a) La diffusion visqueuse



Première phase : diffusion visqueuse (Re = 2000)

Pendant la première phase, les deux tourbillons tournent l'un autour de l'autre avec une vitesse de rotation proche de celle de deux tourbillons ponctuels : $\Omega = \frac{\Gamma}{\pi.b^2}$ ($\Omega = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi.b^2}$ lorsque les deux tourbillons n'ont pas la même circulation). En effet, la vitesse engendrée par le tourbillon 2 sur le tourbillon 1 vaut $\frac{\Gamma_2(b)}{\pi.b^2}$, très proche de $\frac{\Gamma_2}{\pi.b^2}$ même si le cœur est très grand puisque la majeure partie de la vorticité est à un rayon inférieur à b : en conséquence, $\left| \frac{\Gamma_2 - \Gamma_2(b)}{\Gamma_2} \right| \ll 1$, et la vitesse de rotation des deux tourbillons l'un autour de l'autre est presque constante et égale à celle de deux tourbillons ponctuels l'un autour de l'autre.

En particulier, cette vitesse est indépendante du nombre de Reynolds, propriété que nous avons pu vérifier au cours de notre étude (Cf. 2.  tude numérique, variation du nombre de Reynolds).

Ce temps de rotation de chaque tourbillon peut être choisi comme référence pour l'adimensionnement temporel : $t^* = t/t_c$ avec : $t_c = \frac{2\pi^2 b_0^3}{\Gamma}$.

Pendant cette phase, la distance entre les deux tourbillons varie peu, puisque aucun phénomène tel que celui décrit en b) ci-dessous ne les attire encore l'un sur l'autre. Cette distance b_0 est utilisée pour adimensionner les distances du problème.

Dans le même temps, chaque tourbillon est le siège d'une diffusion visqueuse qui en accroît la taille (voir sur ce point notre analyse ci-après). En effet, une gaussienne est solution de l'équation de Navier-Stokes si sa taille évolue suivant $a^2 = 4\nu(t-t_0)$ ou encore en adimensionnant $\left(\frac{a}{b_0}\right)^2 = 8\pi \frac{t^* - t_0^*}{Re}$

Montrons cette loi.

L'équation de Navier Stokes s'écrit en vorticité : $\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \nu \Delta \omega$

Nous cherchons une solution de la forme : $\omega = A \exp\left(-\frac{r^2}{(a(t))^2}\right)$, où A est tel que

$$\int_{\mathbb{R}} \omega = 1, \text{ soit, après calcul } A = \frac{1}{\pi a^2}.$$

En remarquant que $\vec{v} \cdot \nabla \omega = 0$ (ces vecteurs étant orthogonaux), et après calcul :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \left(-\frac{2 \cdot a'}{\pi a^3} + \frac{2r^2 a'}{\pi a^5}\right) \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{(a(t))^2}\right) \text{ et } \Delta \omega = \left(-\frac{4}{\pi a^4} + \frac{4r^2}{\pi a^6}\right) \cdot e^{-\frac{r^2}{a^2}}.$$

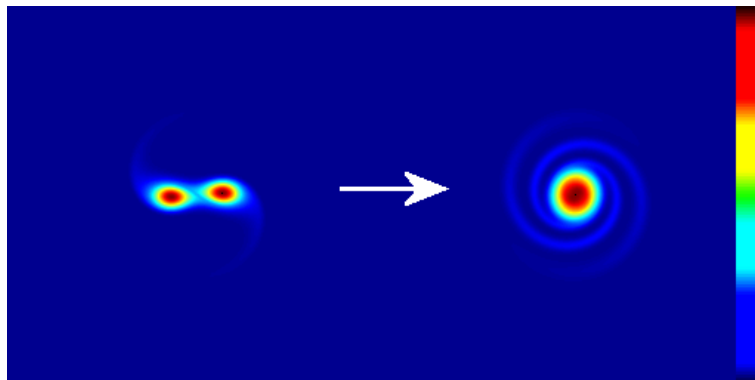
En égalisant, et en comparant les puissances de r, on obtient l'équation en a(t) :

$aa' = 2\nu$, d'où finalement : $a^2(t) = 4 \cdot \nu \cdot (t - t_0)$, ainsi qu'annoncé.

Lorsque la taille de chacun des tourbillons atteint une valeur critique, se produit un nouveau ph n me, avec l'apparition de pointes sur leurs extrémités : on entre dans une seconde phase, marquée par deux nouveaux ph n mes :

- o le rapprochement rapide des deux tourbillons;
- o la formation et l'étirement de filaments de vorticité.

b) La fusion des deux vortex



2^e phase : fusion par convection (Re = 2000)

Peu à peu se forment donc des filaments, qui prennent naissance sur chacun des tourbillons et s'affinent en s'enroulant autour des cœurs (Cf. l'illustration ci-dessus).

Simultanément, les deux tourbillons se rapprochent l'un de l'autre, avant de fusionner.

La théorie mécanique relie ces deux phénomènes –l'éjection des filaments et le rapprochement des tourbillons– par la conservation du moment angulaire total : les filaments ajoutent du moment angulaire qui doit donc être compensé par le rapprochement des tourbillons.

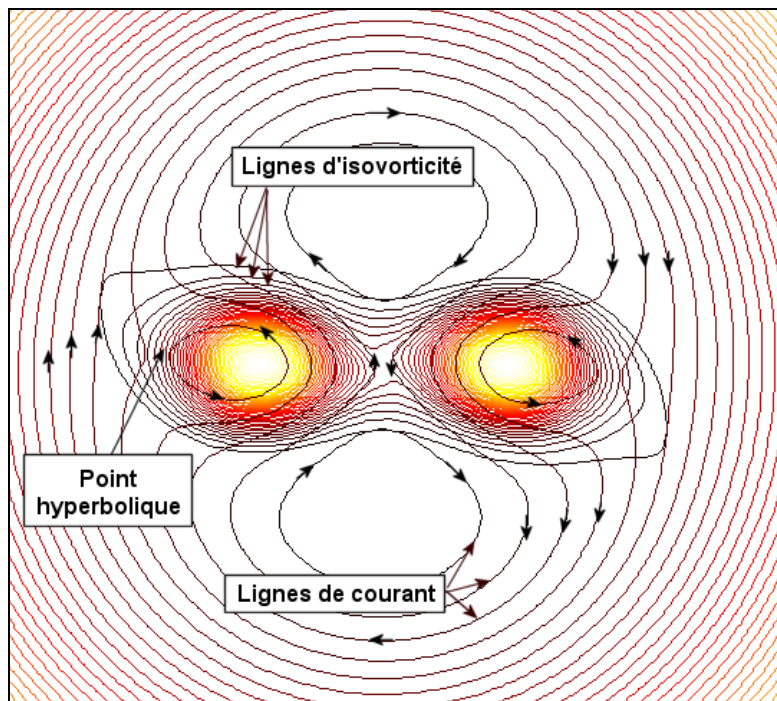
Plus précisément, dans sa thèse, Meunier décrit le scénario de la façon suivante :

En analysant le champ potentiel dans le fluide, dans le repère tournant (où les cœurs sont immobiles), on note la présence de points, dits "hyperboliques", situés sur la droite reliant les deux cœurs, de part et d'autre de ceux-ci, et au-delà desquels le champ de vitesse est dirigé vers l'extérieur et en sens horaire (Cf. schéma); au contraire, à l'intérieur, avant ces points, la vitesse est dans le sens de rotation des tourbillons, et dirigée vers l'intérieur.

Dès lors, lorsque la diffusion visqueuse fait croître les cœurs jusqu'à ces points, la vorticité est advectée loin du cœur du tourbillon, et en rotation dans le sens contraire de celui des tourbillons ; par ce phénomène donc, de la vorticité est rejetée à distance du cœur, pour former les filaments : afin de conserver malgré cela le moment angulaire total, les tourbillons doivent se rapprocher l'un de l'autre.

Notons que ces deux phénomènes s'influencent réciproquement : l'étirement des filaments accélère le rapprochement des cœurs, qui accélère l'allongement des filaments.

On peut également voir cet effet en considérant le champ de vitesse crée par les filaments sur les cœurs (on le calcule par la loi de Biot&Savart, en retranchant au champ total celui crée par une gaussienne de même circulation et de même taille de cœur que notre tourbillon) : ce champ de vitesse projette les tourbillons l'un sur l'autre.



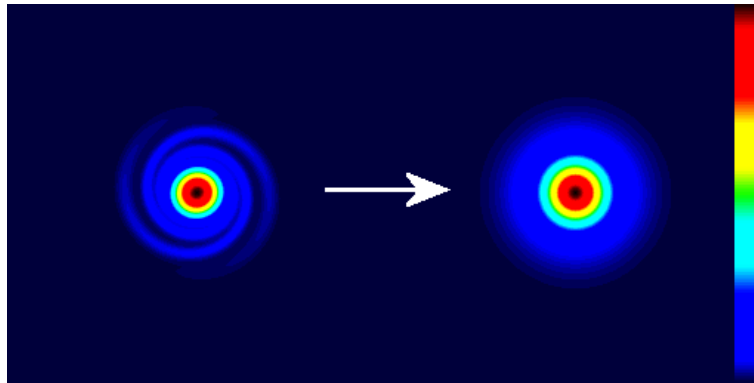
Lignes d'iso- ϕ et d'iso-vorticité dans le référentiel tournant lié aux centres des tourbillons ($Re = 2000$)

On obtient la vitesse de rotation en suivant les maxima de vorticité à chaque instant, grâce à quoi on peut obtenir les lignes d'iso- ϕ dans le repère tournant

Par ce processus, les deux tourbillons se rapprochent donc.

Néanmoins, ce processus ne permet pas la fusion totale des deux tourbillons : lorsque ceux-ci se sont suffisamment rapprochés, les vitesses induites ne les rapprochent plus, et c'est une seconde phase essentiellement diffusive qui "lissera" la vorticité, aboutissant à la fusion finale des deux vortex (voir notre étude de cette phase plus bas, en 2).

c) La symétrisation du vortex



3^e phase : diffusion des filaments (Re = 2000) Le contraste a été amplifié pour pouvoir mieux visualiser les filaments de vorticité.

Dans une troisième phase, les filaments s'enroulent autour de la structure centrale à cause de la rotation différentielle engendrée par le système : la vitesse engendrée par chaque filament pousse les autres   s'enrouler de cette façon.

Ce phénomène conduit à l'axisym trisation du tourbillon, dont la taille continue d'augmenter par diffusion visqueuse.

Ce tourbillon, issu de la fusion de deux tourbillons plus petits, possède un cœur large; de ce fait, on a presque en son centre une rotation de corps solide.

Notons enfin que si le nombre de Reynolds est grand, la diffusion ne peut lisser rapidement les tourbillons, et il reste un temps une bande de vorticité nulle entre les deux maxima de vorticité : cette situation équivaut à une vorticité négative dans un écoulement en rotation solide; dans la suite, on assiste à un étirement de la bande; le fluide étant incompressible, celle-ci devient plus étroite; enfin, la diffusion visqueuse finit par lisser le système tourbillonnaire, et on obtient là encore un cœur en rotation de corps solide.

La distinction entre les deux premières phase est obtenue par analyse des variations du rapport $\frac{a}{b}$. En effet, la diffusion visqueuse conduit à une croissance régulière du rayon des vortex, selon la loi exposée lors de l'étude de la phase de diffusion ci-dessus. Au contraire, la distance b entre les vortex suit une variation irrégulière : d'abord constante lors de la phase diffusive, elle baisse rapidement lors de la phase convective.

C'est pourquoi ce rapport est le paramètre crucial de l'étude de la fusion de deux tourbillons, et nous reviendrons sur son utilisation au long de ce rapport.

2 - Les modèles utilisés pour le calcul des différents paramètres

L'étude de la fusion des tourbillons se fait notamment en suivant l'évolution de la distance entre les tourbillons : il nous faut donc préciser ici comment se fait le calcul de cette distance; d'autre part, on est amené, on l'a vu, à distinguer trois phases dans l'évolution de la dynamique étudiée : nous présentons ici une manière expérimentale de déterminer l'instant de séparation entre les deux premières phases.

a) Calcul de la distance entre les tourbillons

Pour calculer la distance entre les deux tourbillons, deux méthodes peuvent être utilisées :

- Calculer la distance entre les deux maxima de vortacité ; cette méthode peut cependant donner lieu à des inexactitudes, en particulier lorsque l'on s'intéresse à l'évolution des deux tourbillons en milieu turbulent : la décroissance de l'amplitude de ceux-ci du fait de la diffusion visqueuse peut réduire cette amplitude au niveau de celle du bruit, et la détermination de la position des cœurs est alors entachée d'erreur. C'est cependant cette méthode qui est utilisée dans le programme utilisé (voir ci-après).
- Réaliser un fit des tourbillons avec des gaussiennes : on calcule la gaussienne la plus proche du vortex étudié, et on considère que le centre de la gaussienne obtenue est aussi centre du tourbillon.

Signalons également une technique utilisée pour accroître la précision de la méthode des maxima de vortacité : on "lisse" les tourbillons en moyennant chaque point avec ses voisins; de cette façon, le maxima obtenu est entouré de points de haute vortacité, et donc plus probablement le véritable centre du vortex.

Néanmoins, cette méthode a pour inconvénient de modifier la valeur du maximum considéré.

b) Phase diffusive et phase convective : critère de changement de phase

Dans notre étude, il est important de donner un critère pour dater le début de la phase convective.

Nous présentons ici l'étude faite par Meunier dans 1 (bibliographie) : elle consiste à montrer qu'on peut caractériser le changement de phase par un critère sur le rapport $\frac{a}{b}$.

La phase diffusive dure, ainsi qu'on l'a vu, jusqu'à ce que la distance b commence à diminuer; quantifions cela en nous donnant une valeur X : on situe le début de la phase convective lorsque la distance b a diminué de $X\%$.

On peut calculer le temps que dure cette première phase diffusive, en utilisant la loi de variation du rapport $\frac{a}{b}$ par diffusion vu plus haut :

$$\Delta t_1^* = \left(\frac{a_c}{b_0}\right)^2 \frac{Re}{8\pi^2}$$

La phase convective, quant à elle, dure une durée indépendante de Re .

En conséquence, en traçant le temps avant la fusion en fonction de Re , la pente nous donne, pour une valeur fixée de X , le rapport critique $\frac{a_c}{b}$.

En faisant ensuite varier X , on constate que la variation de $\frac{a_c}{b}$ avec X est du même ordre que notre incertitude sur sa mesure : on a donc obtenu ainsi un critère de changement de phase.

Au cours de sa thèse, Meunier trouve :

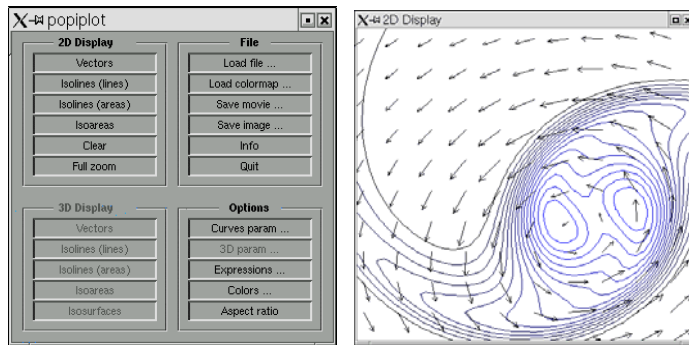
$\frac{a_c}{b} \approx 0.244 \begin{array}{l} + \\ - \end{array} 0.01$
--

3 - Mise au point de l'outil

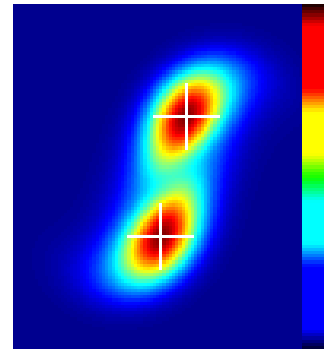
Au cours de cette étude, nous avons utilisé un code source rédigé en C qui effectue la simulation des équations de Navier-Stokes. Ce programme permettait de sortir des données au format lisible par le logiciel *popiplot* (www.lmm.jussieu.fr/MEMBRES/POPINET/), que nous n'avons pu utiliser avant la troisième séance de TMS à cause de l'absence d'une bibliothèque dans le système d'exploitation des ordinateurs des salles d'informatique. C'est pourquoi nous avons implémenté un module de sortie d'image BMP pour pallier à ce problème.

Nous avons utilisé trois outils distincts pour l'exploitation des données :

- ❖ *popiplot* était adapté pour le tracé de contours et le traitement des variables autres que la vorticité (la fonction de courant en particulier).
- ❖ le module de sortie BMP permettait une visualisation continue et pratique de la vorticité.
- ❖ un fichier de sortie texte nous permettait d'obtenir des données directement utilisables comprenant, entre autres, la distance entre les tourbillons et le centre de l'image en fonction du temps.



Logiciel popiplot : affichage de la vorticité ($Re = 20$)



Fichier BMP sorti par le module programmé ($Re = 20$)

Une fonction importante du programme est la recherche et le suivi des maxima de vorticité, que l'on assimile aux centres des vortex. L'algorithme de recherche des maxima est le suivant :

- ❖ les positions des maxima sont initialisés à leur valeur initiale effective (connue).
- ❖ à chaque itération, une recherche locale du maximum de vorticité est effectuée par la méthode du gradient en partant de la position précédente du maximum.

Cette méthode, valide lorsqu'il n'y a pas de bruit, est parfois peu fiable en présence de bruit comme nous le verrons par la suite.

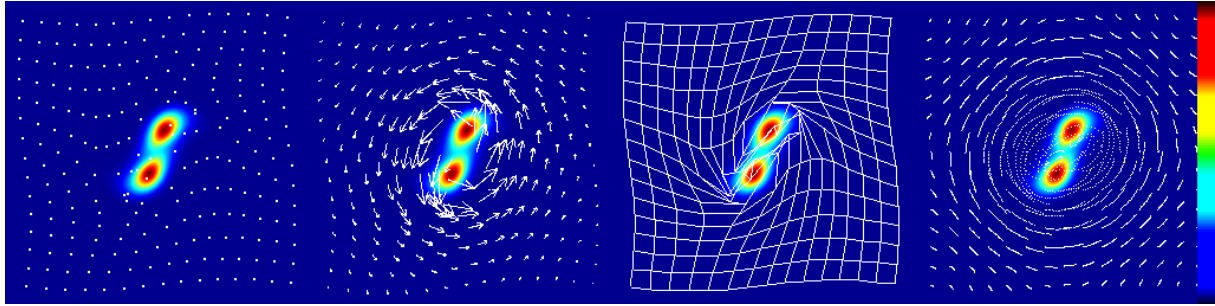
4 - Visualisation de l'écoulement

En complément de la sortie BMP que nous avons écrite, nous nous sommes dotés d'outils de visualisation de l'écoulement : nous avons ainsi réalisé un module de suivi lagrangien des points du fluide. Quatre modes différents sont possibles :

- affichage de la position des points : une grille régulière de point est dessinée au lancement du programme. A chaque point est ensuite attribuée la vitesse du fluide à cet endroit, de façon à visualiser le mouvement de ces "particules fluides";
- affichage de la vitesse : suivant le même principe, une grille est dessinée, avec en chaque point la valeur du champ de vitesse, représenté par une flèche de taille variable; les points sont ensuite emportés par le fluide de la même façon que dans le premier cas, figurant toujours le champ de vitesse par des flèches;
- affichage des "déformations" : les points sont maintenant reliés, et on observe les déformations de la grille matérielle ainsi conçue;
- affichage des trajectoires des points lagrangiens.

Ces outils nous ont permis de mieux appréhender l'évolution du fluide au cours de la fusion.

Ci-après, une illustration des quatre modes, au début de la phase convective.



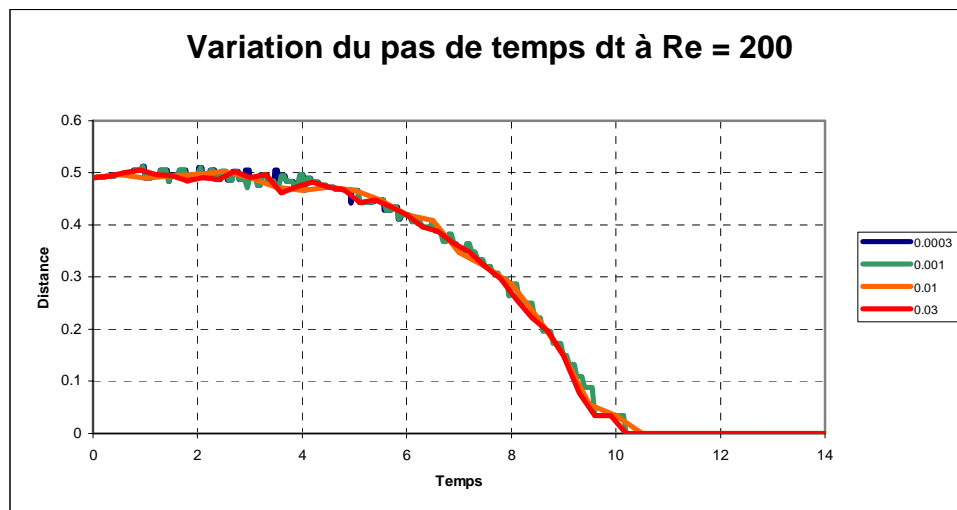
Différentes options de sortie BMP : points, flèches, grille, trajectoires

II - Consistance, étude numérique

Afin de s'assurer de la pertinence de nos choix numériques (nombre de points de discrétisation en fonction du nombre de Reynolds), nous avons soumis le logiciel à différents tests :

1 - *Variation du pas de temps*

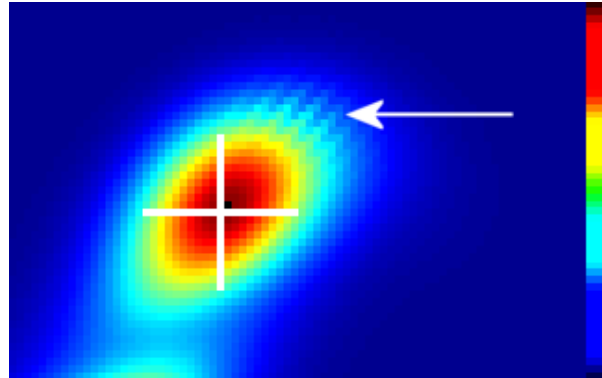
Nous avons tout d'abord testé le programme à différentes valeurs du pas de temps utilisé dans la discrétisation temporelle de l'équation de Navier-Stokes. La grandeur mesurée est la distance entre les vortex et le centre de l'image : on compare cette évolution selon les différentes valeurs du pas de temps, afin de noter les éventuelles erreurs engendrées par ce choix. Les résultats obtenus sont présentés ci-dessous.



Etude de la convergence en fonction du pas de temps à $Re = 200$ (pour des pas de temps supérieurs à 0.03, la simulation échoue au bout de la deuxième itération)

On peut dire que la simulation fournit des résultats similaires (avec une erreur voisine de 5%) tant que le pas de temps est inférieur à un nombre dt_0 , qui décroît avec le nombre de

Reynolds, et qui est voisin de 0.03 pour $Re = 200$. Cependant, les images de vorticité nous montrent que des **franges** peuvent apparaître puis disparaître si le pas de temps est trop grand (image ci-dessous).

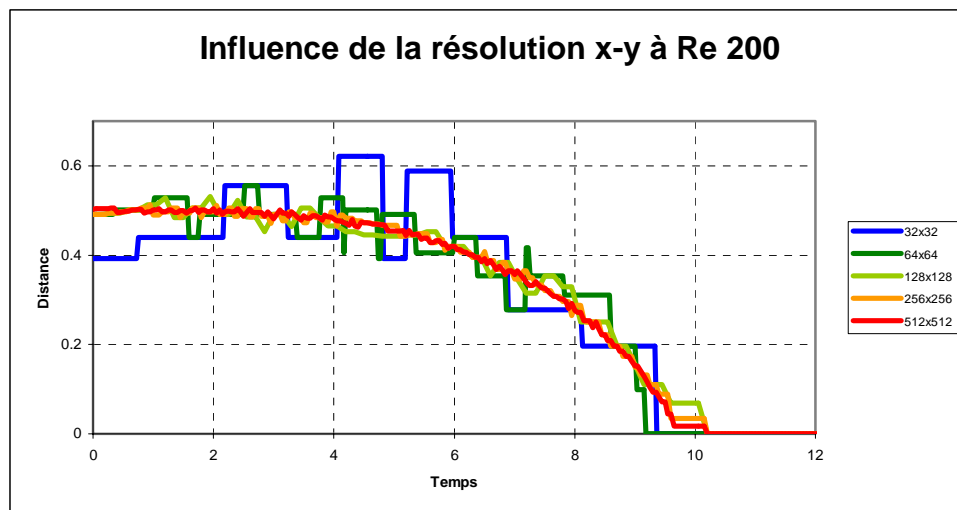


Franges qui apparaissent pour un pas de temps voisin du pas de temps maximum (ici $Re = 200$, $dt = 0.01$)

C'est pourquoi, au cours des tests suivants, nous avons choisi $dt = 0.001$ pour $Re = 200$ et $dt = 0.005$ pour $Re = 2000$.

2 - Variation de la précision de la maille

Nous avons ensuite testé le programme pour différentes mailles : 32×32 à 512×512 nœuds. La grandeur mesurée est toujours la distance entre les vortex et le centre de l'image.



Variation du nombre de mailles à $Re = 200$

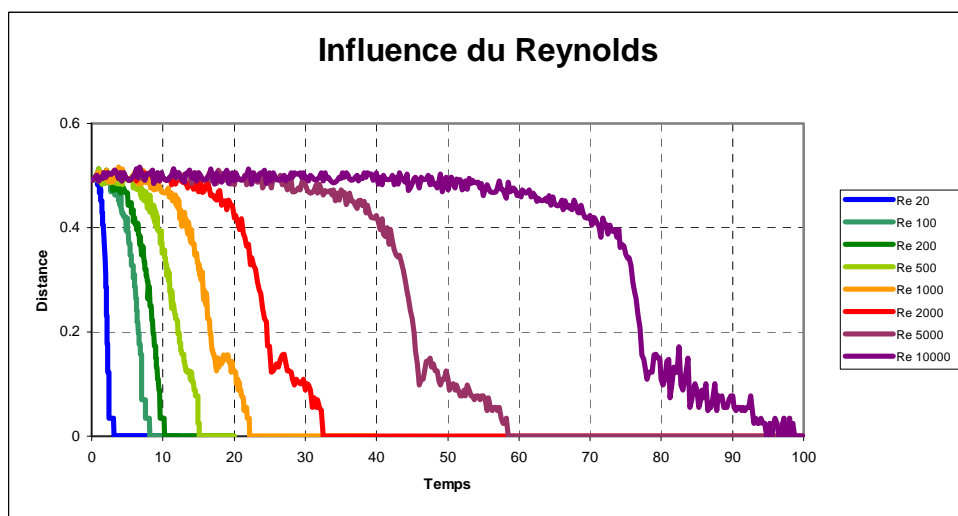
Encore une fois, les résultats obtenus ne divergent pas.

Cependant, les variations de la distance mesurée sont importantes, et on peut les relier aisément à la taille de la maille utilisée : sur le graphique ci-dessus en effet, pour un maillage 32x32, la distance s'écarte d'environ 0.2 de la valeur plus précise obtenue pour un maillage 512x512. Or, dans ce cas, chaque maille est de taille $\frac{2\pi}{32} \approx 0.2$: l'imprécision est précisément de l'ordre de la taille des mailles.

Pour la suite des simulations effectuées, nous avons choisi une maille de 256x256 nœuds, qui nous semble un bon compromis entre le temps de calcul et la précision.

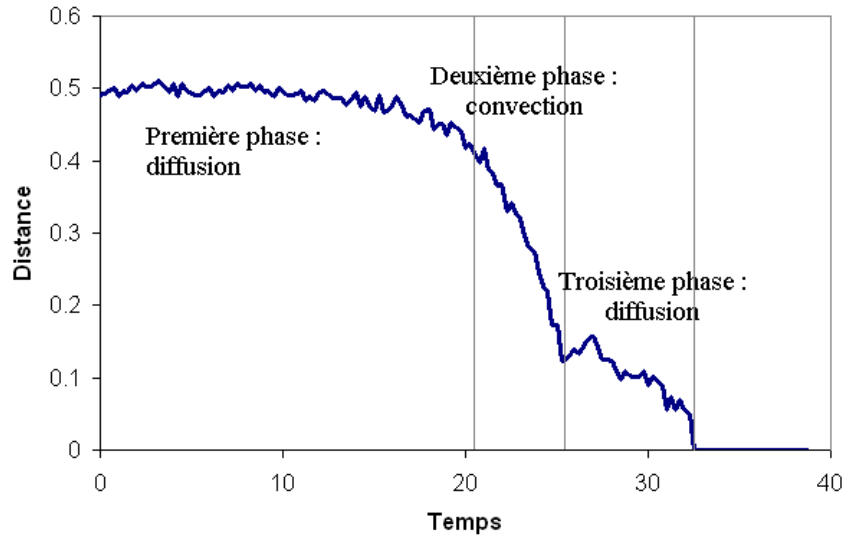
3 - Variation du nombre de Reynolds

Nous avons ensuite réalisé des tests en faisant varier le nombre de Reynolds.



Influence du nombre de Reynolds sur la variation de la distance entre les tourbillons

A partir d'un grand Reynolds, nous voyons mieux apparaître les différentes phases de fusion (figure ci-dessous). Nous allons tour à tour les commenter, et expliquer leur dépendance avec le nombre de Reynolds:



Apparition de trois phases dans la fusion des vortex (ici $Re = 2000$)

Sur ces courbes, on voit distinctement la première phase de diffusion décrite plus haut. Elle est sensiblement plus longue avec les grands Reynolds. Plus précisément, la vitesse de diffusion étant donnée par $v = \frac{U}{a}$ (dimensionnellement), la loi d'évolution de a est (comme

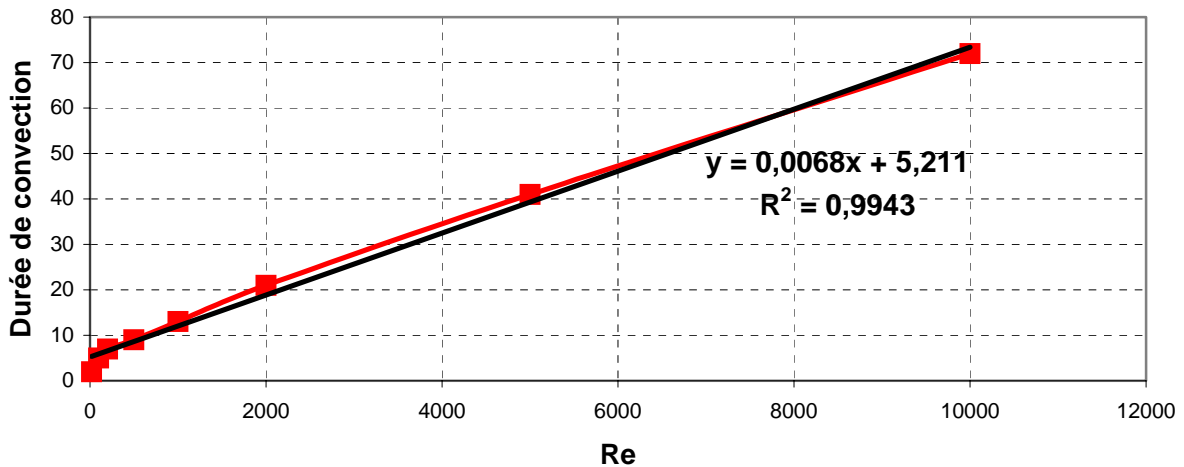
vu ci-avant) : $a(t)^2 = 4U(t - t_0)$, ou, en adimensionné : $\left(\frac{a}{b_0}\right)^2 = 8\pi \frac{t^* - t_0^*}{Re}$. Dès lors, cette phase

durant jusqu'à ce que le rapport $\frac{a}{b}$ atteigne la valeur donnée plus haut, $\frac{a_c}{b}$, sa durée est

donnée par : $\Delta t = \frac{Re}{8\pi} \left(\frac{a_c}{b}\right)^2 \propto Re$. La durée de cette phase est bien proportionnelle au

nombre de Reynolds. Avec les valeurs obtenues numériquement, on vérifie cette propriété en effectuant une régression linéaire sur la durée de la phase diffusive : le graphique ci-après confirme les prédictions théoriques (on a représenté la durée de cette phase en fonction du Reynolds, dans nos essais).

Influence du Reynolds sur la durée de convection



la durée de la phase diffusive est fonction linéaire du nombre de Reynolds

- La phase de convection, sur le graphique précédent, semble quant à elle de durée invariable avec le Reynolds. De fait, dans l'explication théorique exposée plus haut, la viscosité ne joue pas le rôle prépondérant dans les phénomènes survenant pendant cette phase.

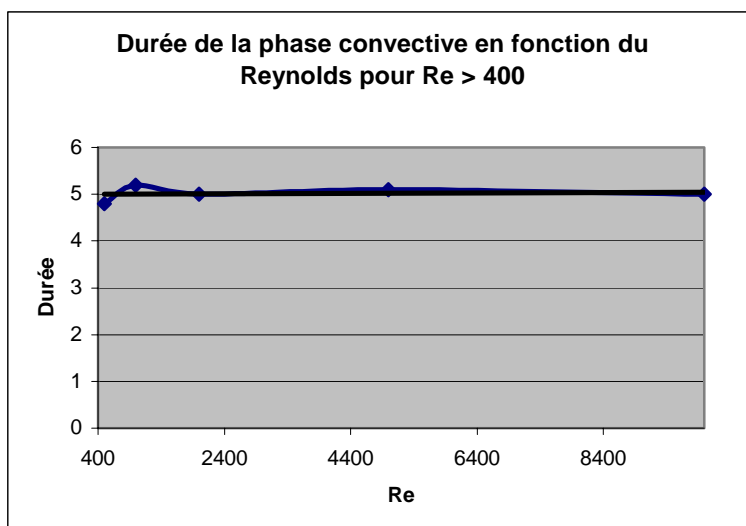
Pourtant, pour les très faibles Reynolds, cette durée semble varier ; nous proposons l'explication suivante :

- lorsque le Reynolds est important, la diffusion se fait lentement, et le phénomène de formation des filaments détermine la durée de cette phase.
- lorsque le Reynolds est très faible, la viscosité devient importante, et la fusion des tourbillons se fait alors essentiellement non plus par convection mais par diffusion.

Afin de vérifier cette assertion, calculons le temps de fusion par diffusion : celui-ci vaut, d'après ce qui précède, $\frac{a^2}{4\nu}$. La littérature fournit par ailleurs le temps moyen de la phase convective, soit la moitié de la période de rotation des tourbillons (ce que l'on vérifie ici). Lorsque $\frac{a^2}{4\nu}$ devient inférieur à $\frac{T}{2}$ donc, la durée de la seconde phase est déterminée par la diffusion; ceci arrive donc pour $Re < 40 T$, soit $Re \approx 400$.

Or cette valeur trouve une excellente confirmation dans nos données : on représente la durée de la phase convective suivant le Reynolds pour :

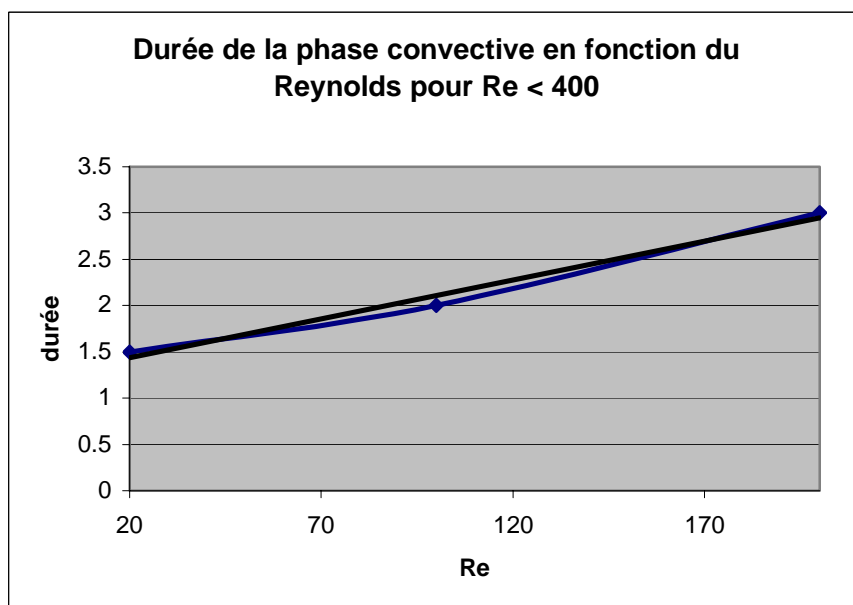
- $Re > 400$: dans ce cas, on voit clairement un temps indépendant du Reynolds, et de fait égal à environ une demi-période de rotation.



La durée de la phase convective est indépendante du Reynolds pour $Re > 400$

- $Re < 400$: d'après l'étude précédente, c'est ici la diffusion qui préside à la phase considérée; elle devrait donc durer un temps $\frac{a^2}{4\nu}$, soit encore $a^2 \cdot Re \propto Re$.

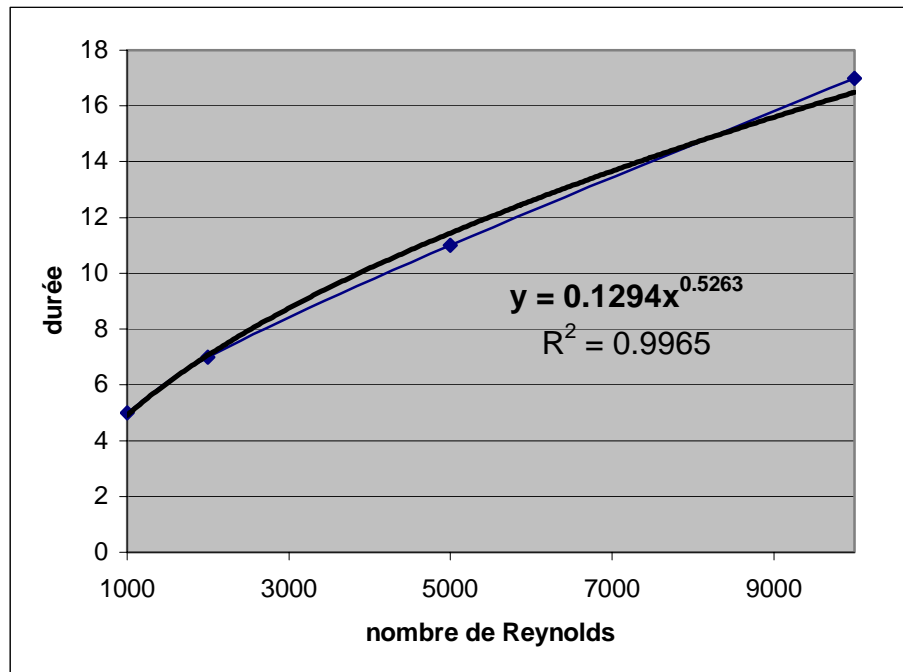
De fait, sur nos essais, nous voyons cette prédiction se confirmer : c'est ici surtout la diffusion qui joue.



La durée de la seconde phase est proportionnelle au Reynolds pour $Re < 400$

- Une troisième phase apparaît après la phase convective, comme évoqué dans la partie 1 : il s'agit d'une phase où les tourbillons n'ont pas encore fusionnés, mais ils sont si proches que le champ de vitesse ne tend plus à les rapprocher de manière significative. La fusion des deux maxima de vorticité a donc lieu par diffusion visqueuse, et c'est pourquoi cette phase est sensiblement plus longue pour les grands Reynolds.

Néanmoins, les deux vortex étant ici très proches l'un de l'autre, les approximations qui avaient permis de parvenir à un temps variant linéairement avec le Reynolds pour la phase 1 ne s'appliquent plus. Il devient très délicat d'estimer la durée de cette phase. La théorie a montré que cette durée variait en $Re^{1/2}$. Nous le vérifions sur nos essais en traçant la durée de cette phase et en demandant une régression en puissance : la puissance obtenue est 0.52 proche de 1/2.



La durée de la troisième phase varie en $Re^{1/2}$

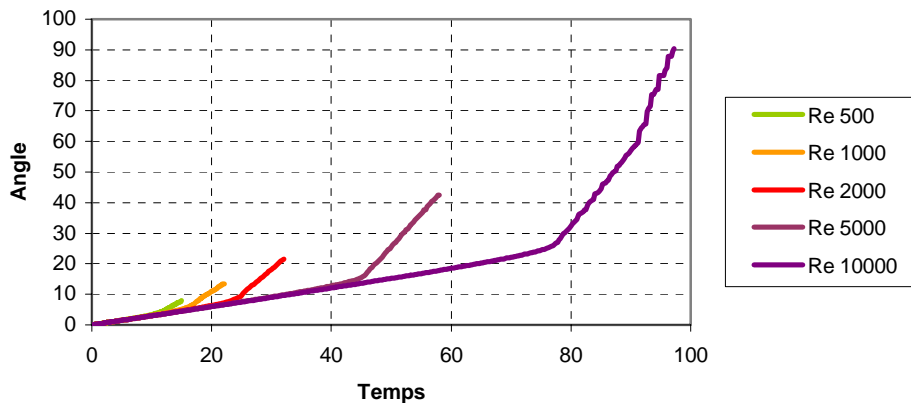
On a pu, au cours de notre étude, constater en outre que le début de cette phase correspond à une modification profonde des lignes de courant de l'écoulement dans le repère tournant :

- Pendant la phase convective, le champ de vitesse présentait quatre cercle attracteurs : autour des deux tourbillons, et sur leur médiatrice, de part et d'autre. Les particules fluides, dans ce repère, tournent dans le même sens que les tourbillons (ceux-ci les entraînent dans une rotation plus rapide que celle des vortex l'un autour de l'autre);
- Au moment du changement de phase, le champ de vitesse devient d'un seul coup axisymétrique, qui amène les particules à tourner autour de l'ensemble formé par les deux tourbillons, et cette fois-ci dans le sens contraire de la rotation des vortex.

4 - Evolution de l'angle des tourbillons

Ci-dessous est représenté la courbe d'évolution de l'angle formé par l'axe joignant les tourbillons avec sa position initiale en fonction du temps : on rappelle que, selon la théorie, la vitesse de rotation des deux tourbillons est constante (ou presque) pendant la phase de diffusion, proche de la vitesse de rotation de deux tourbillons ponctuels.

Evolution de l'angle des tourbillons



Evolution de l'angle entre la droite liant les tourbillons et l'horizontale, pour $Re = 20$ à 2000 . L'angle est mesuré en radians

Pendant la première phase (diffusive), la vitesse angulaire est bien indépendante du Reynolds, et constante, comme prévu. On constate que le nombre de tours qu'effectuent les tourbillons avant de fusionner varie avec le Reynolds : à $Re = 20$, les deux vortex n'ont pas le temps de tourner de π , alors qu'à $Re = 10000$, ils effectuent environ 15 tours complets avant de fusionner.

On remarque également sur ce graphique que pendant la dernière phase diffusive (Cf. paragraphe précédent), la vitesse de rotation des tourbillons augmente de manière significative.

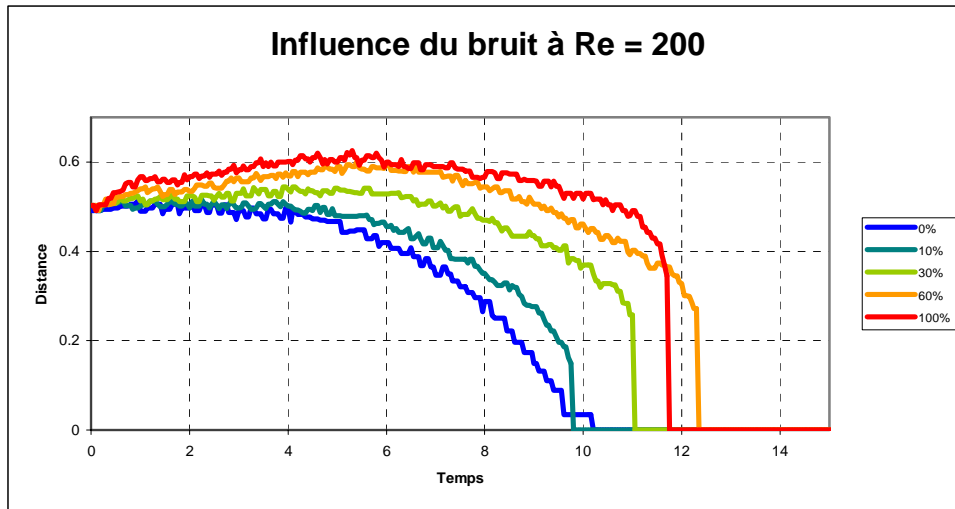
On peut proposer l'explication suivante : à ce moment, les tourbillons ne sont plus projetés l'un sur l'autre par les filaments ; d'autre part comme le moment angulaire doit rester constant, les tourbillons tournent plus vite.

Par ailleurs, la nouvelle vitesse de rotation semble proportionnelle à $Re^{1/2}$, que l'on peut relier à la durée de cette phase diffusive (suivant la même loi en $Re^{1/2}$). Il s'agit néanmoins ici de conjectures, que nous n'avons pas vérifiées complètement.

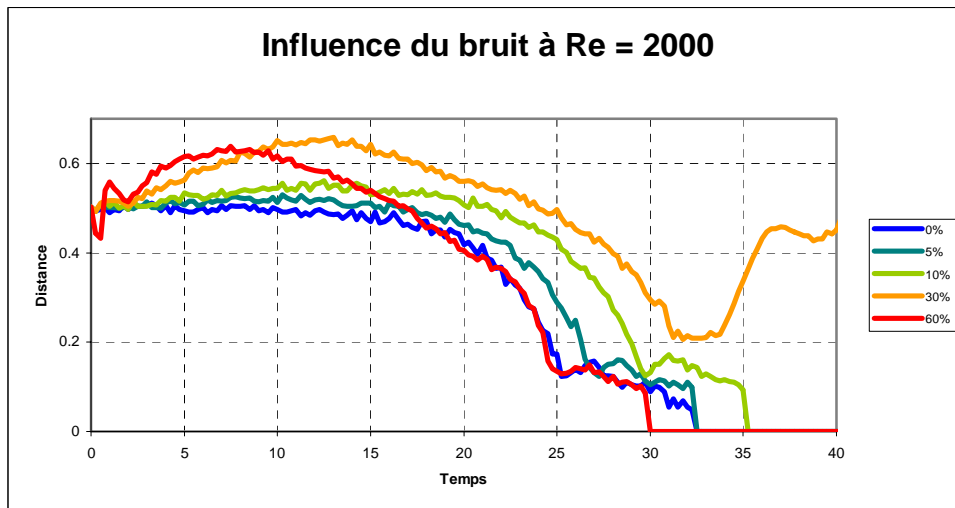
III - Influence du bruit

Nous avons implémenté la présence de bruit à l'instant initial en ajoutant à la transformée de Fourier de la vorticité une fonction complexe aléatoire dont l'amplitude se paramètre. "10% de bruit" correspond à une fonction aléatoire dont le module qui varie entre zéro et 10% du maximum du module de la transformée de Fourier de la vorticité.

1 - Mesures à bruit important



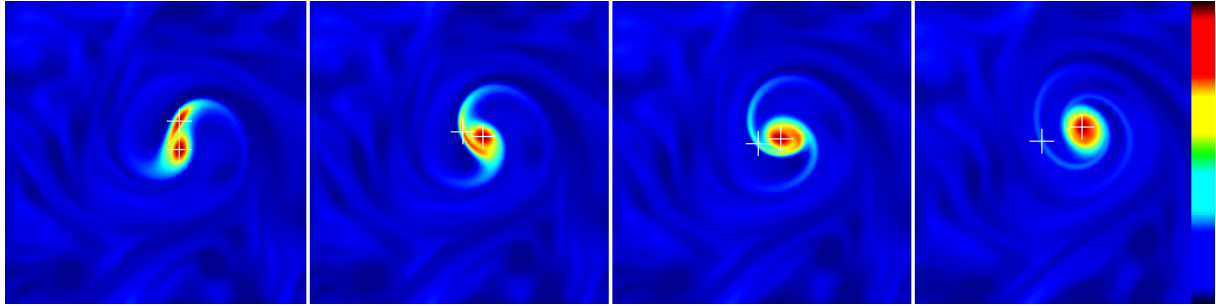
Mesure de la distance entre les deux vortex avec du bruit pour $Re = 200$. Chaque courbe est le résultat d'un seul essai.



Mesure de la distance entre les deux vortex avec du bruit pour $Re = 2000$. Chaque courbe est le résultat d'un seul essai. On remarque une divergence pour l'essai à 30% de bruit (Cf. explications dans le texte)

Signalons que, en présence de bruit, les deux tourbillons ne restent plus symétriques par rapport au centre : il fallait donc modifier le programme, afin de suivre la distance, non plus entre le centre et l'un des tourbillons, mais entre les deux tourbillons.

Mais d'autres pièges subsistent. En effet, dans le cas présenté plus haut à $Re = 2000$ et à 30% de bruit, on observe que la distance ne tend pas vers zéro pour $30 < t < 40$. En regardant les images de vorticité (ci-dessous), on s'aperçoit que l'un des maxima de vorticité est confondu avec un maximum local dans un filament, d  sans doute au bruit. Pour des grandes valeurs du bruit, il faut donc s'assurer "visuellement" que le suivi des maxima est correct : pour cette raison, nous avons ajouté des croix aux endroits où le programme "prétend" situer les deux maxima (illustration ci-dessous). On voit ici une limite importante à la détermination de la distance entre les vortex, comme vu précédemment.

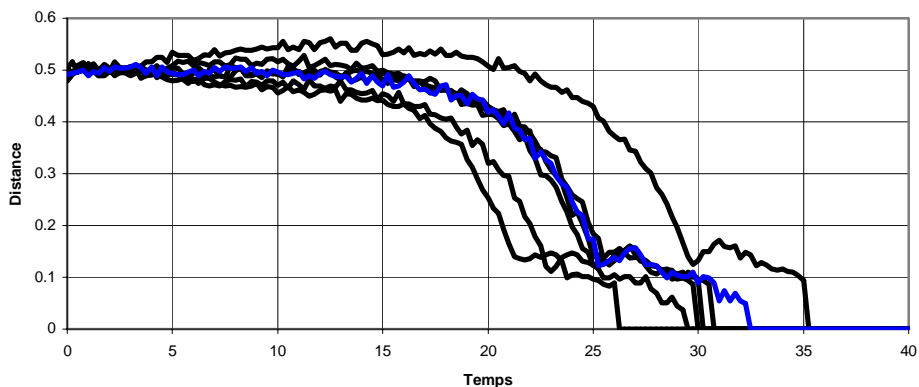


Mauvais suivi du centre des deux vortex ($Re = 2000$, bruit 30%)

Ces détails une fois réglés, les données que l'on trouve sont relativement claires pour la première phase de la fusion : le bruit a tendance à éloigner les deux vortex pendant la phase convective, ce qui amène à une fusion des vortex globalement plus lente, mais plus brutale.

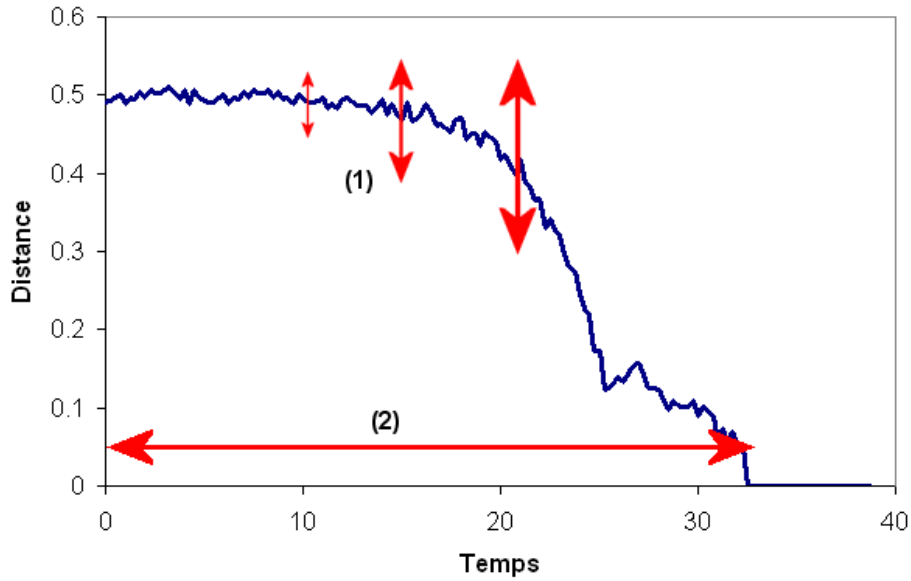
2 - Etude statistique à faible bruit

Echantillons $Re\ 2000$ Bruit 10%



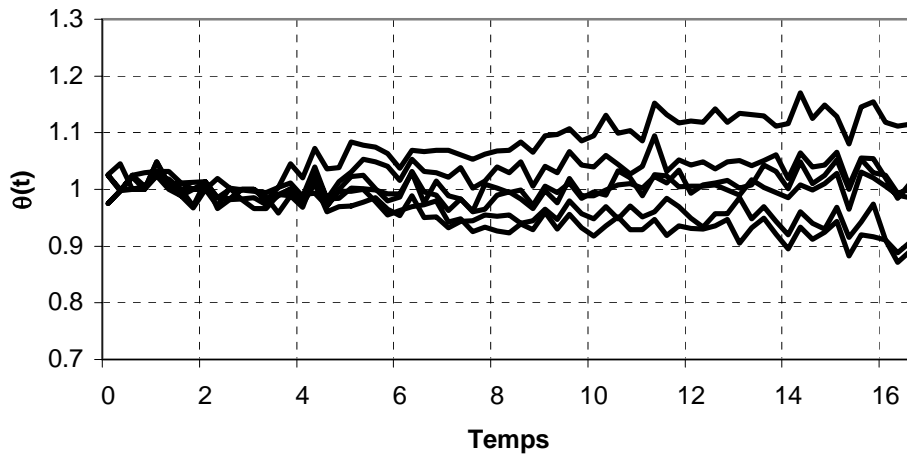
Réalisation de six tests à $Re\ 2000$ et avec un bruit de 10%. Le tracé bleu correspond à la réponse sans bruit.

Nous avons effectué des mesures à $Re\ 2000$ (voir figure ci-dessus) en ajoutant 5% puis 10% de bruit. Elles suggèrent que l'on peut modéliser le bruit par deux phénomènes :



Effets du bruit sur la courbe de distance : (1) modulation par une fonction $\theta(t)$ et (2) modulation en temps par un facteur λ , souvent inférieur à 1

- ❖ la distance entre les tourbillons, lors de la première phase de fusion, est multipliée par une fonction $\theta(t)$ qui s'éloigne de 1 avec le temps. Elle n'est pas nécessairement supérieure à 1 (contrairement à ce qu'on pouvait imaginer à la vue des résultats du paragraphe précédent). La figure ci-dessous représente les valeurs de $\theta(t)$.



Fonction $\theta(t)$ pour les mesures précédentes

- ❖ le temps de fusion est multiplié par un facteur $1-\lambda$, de moyenne légèrement inférieure à 1. Le tableau ci-après montre un résumé des valeurs de λ que nous avons mesurées.

Bruit	5%	10%
Moyenne de λ	0.033	0.069
Ecart-type	0.062	0.115

Résultats statistiques de 2x13 mesures de λ .

Ces résultats suggèrent que l'impact du bruit, en moyenne, et pour les faibles bruits, est linéaire en temps, dans la mesure où il multiplie l'échelle des temps par un facteur $1-\lambda$, où la moyenne et l'écart type de λ sont proportionnels à la quantité de bruit.

IV - Conclusion

Au cours de notre travail de simulation et de modélisation, nous avons ainsi étudié le processus de fusion de deux tourbillons co-rotatifs. Nous avons souligné l'importance pratique, les applications industrielles d'une telle étude.

Après avoir exposé les données théoriques connues sur ce phénomène, nous avons mené une étude sur la consistance numérique du programme. Nous avons ensuite mis au point divers instruments de visualisation de l'écoulement. Nous avons pu vérifier la dépendance des durées des différentes phases avec le nombre de Reynolds, et expliqué ces dépendances. Enfin, nous nous sommes intéressé à l'influence de l'ajout d'un bruit dans l'espace.

Bien entendu, le nombre de simulations que nous avons effectuées est en rapport avec la durée du TMS, à savoir une trentaine d'heure. Plusieurs giga-octets de données ont été exploités. Poursuivre l'étude statistique du bruit nécessiterait de développer un programme d'automatisation des tests, afin d'éviter le dépouillage fastidieux des résultats.

L'étude approfondie de ce phénomène permettrait de comprendre la formation des tourbillons de bout d'aile, et peut-être de la contrôler ; la cadence d'atterrissage des avions, aujourd'hui ralentie par prudence en raison de ces tourbillons, pourrait alors être augmentée, avec les bénéfices que l'on imagine sur l'économie aéronautique.

V - Bibliographie

1. Meunier P., Etude expérimentale de deux tourbillons corotatifs, Thèse publiée en 2001, Université d'Aix-Marseille I
2. Le Dizès S., Verga A., Viscous interactions of two co-rotating vortices before merging, *J. Fluid Mech.* 2002, vol 467, pp. 389-410
3. Agullo O. & Verga A. D. (1997) Exact Vortices Solution of Navier-Stokes equations. *Phys. Rev. Lett.*, 78(12), 2361-2364
4. Brandt S. A. & Iversen J. D. (1977) Merging of Aircraft Trailing Vortices. *J. of Aircraft*, 14(12), 1212-1230
5. Dritschel D. G. (1995) A General Theory for two-dimensionnal Vortex Interactions. *J. Fluid Mech.*, 293, 269-303.
6. Meunier P., Ehrenstein U., Leweke T; & Rossi M. 2002 A merging criterion for two-dimensionnal co-rotating vortices. *Phys Fluids* 14, 2757-2766